Tema 1. Relaciones de Orden. Algebras de Boole

1.1. Conjuntos

→ Definiciones: Conjunto, Cardinal, Conjunto vacío, Subconjunto, Igualdad de Conjuntos, Partes de un conjunto

→ Operaciones con conjuntos: Unión, Intersección , Propiedades de las Operaciones, Complementario de un conjunto, Producto cartesiano de conjuntos y propiedades

1.2. Relaciones Binarias

→ Definiciones: Relación binaria, elementos relacionados, relación en un conjunto

→ Operaciones con relaciones: unión, intersección, complementario, relación inversa, composición de relaciones, propiedades.

1.3. Aplicaciones

→ Definiciones: aplicación, dominio, imagen, imagen recíproca

→ Tipos de aplicaciones: aplicación inyectiva, sobreyectiva, biyectiva.

1.4. Relaciones en un conjunto

→ Propiedades: Reflexiva, irreflexiva, simétrica, antisimétrica, transitiva, circular

→ Caracterizaciones

1.5. Relaciones de equivalencia

→ Definición : Relación de equivalencia, clase de equivalencia de un elemento, partición o conjunto cociente

→ Teorema : Si R es una relación de equivalencia en A, entonces $A/_R = \{[a]\,;\ a \in A\}$ es una partición de A

→ Teorema: Sea $\{A_1,\ A_2, \dots, A_i, \dots\ \}$ una partición de A, entonces la relación R definida en A por $a\,R\,b \Leftrightarrow \exists\ i\ \in I$ tal que $a, b \in A_i$, es una relación de equivalencia en A

1.6. Relaciones de orden

→ Definiciones: Relación de orden, conjunto ordenado

→ Ejemplos: $(\mathbb{N}, \leq)$, $(\mathbb{N}, /)$, $(D_n, /)$, $(\wp(S), \subseteq)$

→ Definiciones: Elementos comparables, conjunto totalmente ordenado. Ejemplos

→ Diagramas de Hasse

→ Órdenes en el conjunto producto. Orden Producto. Orden Lexicográfico.

1.7. Elementos característicos en conjuntos ordenados

→ Definiciones: Maximal, minimal, máximo, mínimo, cota superior e inferior, supremo, mínimo

→ Existencia y unicidad

→ Ordenación topológica

1.8. Retículos

→ Definiciones: Retículo (definición a partir de la relación de orden). Ejemplos

→ Propiedades

→ Definición de retículo a partir de dos operaciones

→ Proposición: Las dos definiciones anteriores son equivalentes, tomando

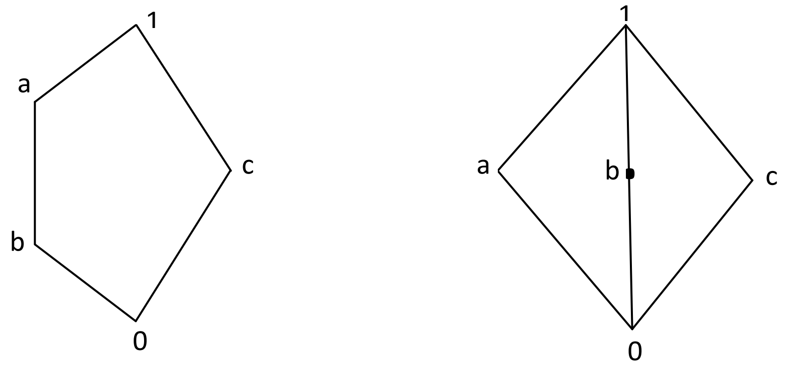
$a \vee b = sup\,\{a, b\}$ y $a \wedge b = inf\,\{a, b\}$.
Además, $a \leq b \iff a \vee b = b \iff a \wedge b = a$

→ Subretículos. Ejemplos.

→ Homomorfismo de retículos.

→ Propiedades de los retículos: retículo acotado, retículo distributivo

→ Ejemplos: $(D_n,/)$ es distributivo para todo $n \in \mathbb{N}$. Los siguientes retículos no son distributivos, ya que $a \wedge (b \vee c) \neq (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$



→ Teorema: Un retículo es no distributivo si y sólo si tiene un subretículo isomorfo a uno de los dos retículos anteriores.

→ Definiciones: Retículo acotado, retículo complementario.

→ Ejemplos: Los retículos $(\wp(S), \subseteq)$ y $B^n = \{0,1\}^n$ son complementarios y distributivos.
$(D_{20},\ /)$ es acotado y distributivo, pero no es complementario
$(D_{30},\ /)$ es acotado, distributivo y complementario.
Los retículos no distributivos del dibujo anterior son complementarios, pero, por ejemplo, el complementario del elemento c no es único.

→ Teorema: En un retículo acotado y distributivo, el complementario, si existe, es único.

1.8. Álgebras de Boole

→ Definición: Un álgebra de Boole es un retículo acotado, complementario y distributivo.

→ Definición: Un álgebra de Boole es un conjunto A donde se han definido dos operaciones binarias:

Suma $\vee : A \times A \rightarrow A$ Producto: $\wedge : A \times A \rightarrow A$,

verificando las propiedades idempotente, conmutativa, asociativa, absorción, elemento neutro, complementario y distributivas.

→ Ejemplos: - $(\wp(S), \cup, \cap)$ es un álgebra de Boole.

- El conjunto de Boole $\{0,1\}$ con las operaciones definidas por la tabla siguiente es un álgebra de Boole.

x	y	$x \vee y$	$x \wedge y$
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	1

- $B^n = \{0,1\}^n = \{(x_1, x_2, \dots x_n) \,;\, x_i \in B\}$ es una álgebra de Boole con las siguientes operaciones

$$(x_1, x_2, \dots x_n) \vee (y_1, y_2, \dots y_n) = (x_1 \vee y_1, \dots, x_n \vee y_n)$$
$$(x_1, x_2, \dots x_n) \wedge (y_1, y_2, \dots y_n) = (x_1 \wedge y_1, \dots, x_n \wedge y_n)$$

- $(D_n, /)$ es un álgebra de Boole si y sólo si $n = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_k$, con p_i números primos distintos dos a dos y distintos de 1.

→ Teorema: Si $(A, \vee, \wedge)$ es un álgebra de Boole, entonces se verifican las siguientes propiedades:

- Absorción del neutro: $1 \vee x = 1$, $0 \wedge x = 0$
- Involutiva: $(x')' = x$ (el complementario de cada elemento es único)
- Leyes de De Morgan: $(x \vee y)' = x' \wedge y'$ $(x \wedge y)' = x' \vee y'$

→ Teorema: Si $(A, \vee, \wedge)$ es un álgebra de Boole, entonces $(A, \leq)$ es un conjunto ordenado. La relación entre las operaciones y el orden es:

$$a \leq b \quad \Leftrightarrow \quad a \vee b = b \quad \Leftrightarrow \quad a \wedge b = a$$

→ Ejemplos:

- El álgebra de Boole $(\wp(S), \cup, \cap)$ es un conjunto ordenado con la relación $(\wp(S), \subseteq)$.
- El álgebra de Boole $(D_n, \vee, \wedge)$ es un conjunto ordenado con la relación $(D_n, /)$.
- El álgebra de Boole $(B^n, \vee, \wedge)$ es un conjunto ordenado con la relación $(B^n, \leq_{Prod})$

1.9. Isomorfismos de álgebras de Boole

→ Definición : Dos álgebras de Boole son isomorfas si son isomorfas como conjuntos ordenados.

→ Teorema: Si $(A, \vee, \wedge)$ es un álgebra de Boole finita, entonces existe un conjunto finito S tal que A y $\wp(S)$ son isomorfas.

→ Teorema: Si S es un conjunto finito con $card(S) = n$, entonces $\wp(S)$ y B^n son álgebras de Boole isomorfas.

→ Teorema: Si $(A, \vee, \wedge)$ es un álgebra de Boole finita, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tals que $card(A) = 2^n$.

1.10. Variables booleanas. Funciones booleanas

→ Definición: Una variable booleana es una variable que toma dos valores.
Ejemplos: $\{1, 0\}$, $\{verdadero,\ falso\}$, $\{SI,\ NO\}$,...

→ Definición: Una función booleana de n variables es una aplicación $f: B^n \longrightarrow B$.
Cualquier sucesión de 2^n ceros y unos es el conjunto de valores de una función booleana.
Se pueden definir $2^{(2^n)}$ funciones booleanas de n variables distintas.

→ Definición: Si $f: B^n \longrightarrow B$, llamamos conjunto de verdad o conjunto de unos de la función f, al conjunto $S(f) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in B^n ;\ \ f(x_1, \ldots, x_n) = 1\}$.

→ Tablas de verdad: representación de una función booleana

$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	…	$\boldsymbol{x_n}$	$\boldsymbol{f(x_1, \ldots, x_n)}$
0	0	…	0	$f(0, 0, \ldots, 0)$
0	0	…	1	$f(0, 0, \ldots, 1)$
…	…	…	…	…
0	1	…	0	$f(0, 1, \ldots, x_n)$
1	0	…	0	$f(1, 0, \ldots, x_n)$
…	…	…	…	…
1	1	…	1	$f(1, 1, \ldots, 1)$

1.11. Expresiones booleanas

→ Definición: Se define una expresión de Boole, o expresión booleana en las n variables $\{x_1, \ldots, x_n\}$ de forma recursiva:

1. $x_1, \dots, x_n$ son expresiones de Boole.
2. Los símbolos $1, 0$ son expresiones de Boole.
3. Si $\mathrm{E}_1\,(\mathrm{x}_1, \dots, \mathrm{x}_\mathrm{n})$, $\mathrm{E}_2\,(\mathrm{x}_1, \dots, \mathrm{x}_\mathrm{n})$ son expresiones de Boole, entonces $\mathrm{E}_1\,(\mathrm{x}_1, \dots, \mathrm{x}_\mathrm{n}) \vee \mathrm{E}_2\,(\mathrm{x}_1, \dots, \mathrm{x}_\mathrm{n})$, $\mathrm{E}_1\,(\mathrm{x}_1, \dots, \mathrm{x}_\mathrm{n}) \wedge \mathrm{E}_2\,(\mathrm{x}_1, \dots, \mathrm{x}_\mathrm{n})$, $\left(\mathrm{E}_1\,(\mathrm{x}_1, \dots, \mathrm{x}_\mathrm{n})\right)'$ son expresiones de Boole.
4. No existen expresiones de Boole que no puedan obtenerse por las reglas anteriores.

→ Propiedad: Si $\mathrm{E}\,(\mathrm{x}_1, \dots, \mathrm{x}_\mathrm{n})$ es una expresión de Boole en n variables, entonces define una función booleana $f(\mathrm{x}_1, \dots, \mathrm{x}_\mathrm{m}) = \mathrm{E}\,(\mathrm{x}_1, \dots, \mathrm{x}_\mathrm{n})$ en m variables, con $m \geq n$. Se dice que $\mathrm{E}\,(\mathrm{x}_1, \dots, \mathrm{x}_\mathrm{n})$ es una expresión que representa a $f(\mathrm{x}_1, \dots, \mathrm{x}_\mathrm{m})$.

→ Teorema: Si $f_1: B^n \to B$ y $f_2: B^n \to B$ son funciones booleanas, entonces también son funciones booleanas:

- La suma: $f = f_1 \vee f_2$: $B^n \to B$, tal que $f(x) = (f_1 \vee f_2)(x) = f_1(x) \vee f_2(x)$
- El producto : $f = f_1 \wedge f_2$: $B^n \to B$, tal que $f(x) = (f_1 \wedge f_2)(x) = f_1(x) \wedge f_2(x)$

Además, los conjuntos de verdad son:

$S(f_1 \vee f_2) = S(f_1) \cup S(f_2)$ $\qquad$ $S(f_1 \wedge f_2) = S(f_1) \cap S(f_2)$

→ Propiedad: Si $f: B^n \to B$ es una función booleana, entonces existe una expresión booleana $\mathrm{E}\,(\mathrm{x}_1, \dots, \mathrm{x}_\mathrm{n})$ que representa a f .

Para toda $x = (x_1, \dots, x_n) \in S(f) = \{\mathrm{x} \in B^n ;\ f(x) = 1\}$, se define el producto elemental asociado a x , como

$E_x = E_{x_1} \wedge E_{x_2} \dots \wedge E_{x_n}$, con $E_{x_i} = \begin{cases} x_i\,, & si\ x_i = 1 \\ x_i{}'\,, & si\ x_i = 0 \end{cases}$ para todo $i \in \{x_1, \dots, x_n\}$

Entonces, una expresión de Boole que representa a f en forma de "suma de productos elementales" es

$$E(f) = \vee_{x \in S(f)} E_x$$

1.12. Simplificación de expresiones booleanas

Una función booleana puede tener varias expresiones que la representen y lo ideal es encontrar la más simple de todas ellas.

La expresión como suma de productos elementales no es la más simple, en general, pero sí es el punto de partida de todos los métodos de simplificación.

Estos métodos se basan en la búsqueda de pares de productos elementales que difieran solamente en una variable.

→ Definición: Las expresiones de Boole $E_1(x_1, \dots, x_n)$ y $E_2(x_1, \dots, x_n)$ son equivalentes si representan la misma función de Boole.

→ Teorema: Si $E(x_1, \dots, x_n)$ es una expresión de Boole en n variables y z es una variable, entonces las expresiones $E(x_1, \dots, x_n)$ y

$$E^*(x_1, \dots, x_n, z) = \big(z \wedge E(x_1, \dots, x_n)\big) \vee \big(z' \wedge E(x_1, \dots, x_n)\big)$$

son expresiones equivalentes como expresiones de $n+1$ variables.

1.13. Mapas de Karnaugh

Dada una expresión de Boole de n variables, su mapa de Karnaugh es una cuadrícula formada por 2^n cuadrados, de tal forma que cada cuadrado representa a un elemento $x \in B^n$.

	y	y'
x	11	10
x'	01	00

	y	y	y'	y'
x	110	111	101	100
x'	010	011	001	000
	z'	z	z	z'

	y	y	y'	y'	
x	1100	1110	1010	1000	t'
x	1101	1111	1011	1001	t
x'	0101	0111	0011	0001	t
x'	0100	0110	0010	0000	t'
	z'	z	z	z'	

En los cuadrados correspondientes a los elementos $x \in B^n$ tales que $f(x) = 1$ se escribe un 1, y en el resto un 0.

Para simplificar una expresión booleana E se procede de la siguiente forma:

1. Se consideran todos los rectángulos simples, del mayor tamaño posible, que recubran la zona de unos del mapa de Karnaugh, aunque se solapen.
2. Se eliminan los rectángulos simples que estén contenidos en la unión de otros, de forma que la zona de unos quede recubierta por el menor número de rectángulos del mayor tamaño posible.
3. La suma de las expresiones correspondientes a los rectángulso que quedan al final del proceso es una expresión simplificada de la expresión original.

4. La expresión simplificada depende de las elecciones efectuadas en el proceso, por lo que o es necesariamente única.

1.14. Método de Quine-McCluskey

El Método de Quine-McCluskey consiste en agrupar sistemáticamente productos que difieren en una única variable, pero en vez de utilizar productos elementales, se utilizan los elementos de $S(f)$. El proceso es el siguiente:

1. Se forma una lista con los unos de la función $S(f)$, por bloques, ordenados de mayor a menor según el número de unos que contienen.
2. Se compara cada elemento de cada bloque con todos los del bloque inmediatamente inferior. Si dos elementos se diferencia en un único dígito, se les asigna el mismo índice. Se forma otra lista reduciendo las filas con el mismo índice, sustituyendo la variable que toma distinto valor por un guion.
3. Se repite el paso 2 con la nueva lista y se continúa este proceso. Finaliza el proceso cuando las filas que quedan no son comparables, porque se diferencian en más de un dígito.
4. Se consideran las filas no comparables entre sí de todas las listas, es decir, las que no tienen índice. Se recogen los resultados en otra tabla cuyas columnas son los $x \in B$ con $f(x) = 1$ y cuyas filas son las expresiones no comparables.
5. Se marcan las coincidencias entre filas y columnas, y se elige un único elemento de cada columna con el siguiente criterio:
   Primero se eligen aquellos para los que existe una única posibilidad.
   Para los restantes se elige la menor cantidad posible de entre aquellos con mayor cantidad de guiones.
   Una fila es redundante si sus elementos están incluidos en las restantes filas.
6. La expresión de Boole en forma de "suma de productos mínima" es la correspondiente a la suma de los productos elementales asociados a las filas no redundantes, que dependerá de las elecciones hechas en el proceso.

Hoja 1. Conjuntos (2016)

1. Describir por extensión los conjuntos formados por los siguientes elementos:
   a) Los números naturales impares menores de 11
   b) Los números pares mayores que 10 y menores que 20
   c) Los números primos menores de 15

2. Di si son verdaderas o falsas las siguientes expresiones
   a) $6 \in \{2, 4, 5, 6, 9\}$
   b) $y \in \{o, p, q, x\}$
   c) $x \notin \{0, p, q, y\}$

3. Describe por extensión los siguientes conjuntos

$$A = \{n\ natural\ ;\ \ 15 < 3n < 30\}$$
$$B = \{n\ natural\ ;\ \ 7 < n < 12\ \ y\ \ \exists\ a\ impar\ \ tal\ que\ \ n = a + 5\}$$

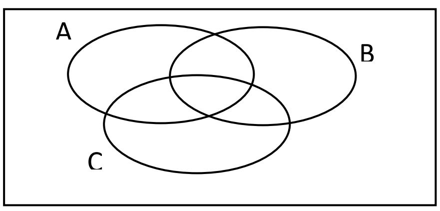
4. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son: vacíos, finitos, infinitos?
   a) $A =\ vocales\ de\ la\ palabra\ \ 'conjunto'$
   b) $B = \{1, 3, 5, 7, 9, \dots\}$
   c) $C = \{x \in \mathbb{N}\ ;\ \ x < 15\}$
   d) $D = \{x \in \mathbb{N}\ ;\ \ 5 < x < 5\}$
   e) $E = \{x \in \mathbb{N}\ ;\ \ x\ \ es\ un\ número\ par\}$
   f) $F = \{x \in \mathbb{N}\ ;\ \ x\ > 15\}$
   g) $G = \{x \in \mathbb{N}\ ;\ x =\ |x|\}$

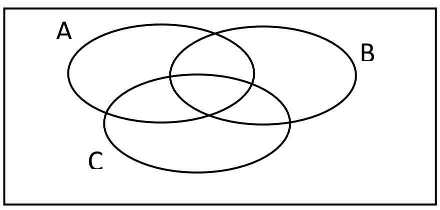
5. Sean los conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$, $C = \{3, 4, 5, 6\}$, subconjuntos del conjunto total $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Halla:
   a) $A \cup B$ b) $A \cup \bar{C}$ c) $\overline{B \cup C}$ d) $\overline{A \cap C}$ e) $A \cap B \cap$ C f) $A \cap B$

6. Dado el conjunto $A = \{6, 2, 8, 4\}$, encuentra todos los subconjuntos de A que se puedan construir con sus elementos.

7. ¿Cuál es la intersección de los conjuntos $\{e, x, i\ t, o\}$ y $\{t, r, i, u, n, f, o\}$? ¿Y su unión?

8. Sombrea en los siguientes diagramas de Venn: a) $A \cap B \cap$ C b) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$





9. Se consideran los conjuntos $A = \{a, b\}$, $B = \{2,3\}$, $C = \{3,4\}$. Calcula:
   a) $A \times (B \cup C)$ b) $(A \times B) \cup (A \times C)$ c) $A \times (B \cap C)$ d) $(A \times B) \cap (A \times C)$

10. Sean los conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b\}$, $C = \{3, 4\}$. Calcula $A \times B \times C$.

11. Dado el conjunto $A = \{1, 2, 3\}$, obtén el conjunto de las partes de A, $\wp(A)$.

12. Dados los conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $B = \{2, 4, 6, 8\}$, obtén $A \setminus B$ y $B \setminus A$.

Hoja 2. Relaciones, aplicaciones, relaciones de equivalencia (2016)

1. Dados los conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{1, 3, 5\}$, y la relación R de A en B definida por $a\ R\ b \iff a < b$, describe los pares de la relación.

2. En el conjunto $\mathbb{Z}$ se define la relación aRb si y sólo si $a^2 = b^2$. Averigua si se trata de una relación de equivalencia en $\mathbb{Z}$ y, de ser cierto, encuentra la clase de equivalencia del elemento 5, es decir $[5]$.

3. Dados los conjuntos $A = \{2, 3, 4, 5\}$ y $B = \{3, 6, 7, 10\}$ y la relación de divisibilidad R de A en B, $a\ R\ b \iff 'a'\ divide\ a\ 'b' \iff b\ es\ múltiplo\ de\ a$, describe los pares de la relación.

4. Sea el conjunto $\wp(S)$ de todos los subconjuntos de $S = \{a, b\}$, y la relación R definida en $\wp(S)$ por $A\ R\ B \iff |A \cap B| = 1$. Averiguar si es una relación reflexiva, simétrica y/o transitiva.

5. Estudiar si las relaciones en el conjunto $A = \{a, b, c\}$, dadas por las siguientes matrices, son reflexivas, antisimétricas y transitivas.
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{N} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6. Dada la relación definida en $\mathbb{Z}$ por: $a\ R\ b \iff a - b = 5k$, con $k \in \mathbb{Z}$, estudiar si es una relación reflexiva, simétrica y transitiva, y encontrar tres números enteros no relacionados entre sí.

7. Halla el dominio y la imagen (o rango) de cada una de las siguientes relaciones:
   a) $R = \{(1,5) , (4,5), (1,4), (4,6), (3,7), (7,6)\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
   b) S definida en $\mathbb{N}$ por $x\ S\ y \iff 2x + y = 16$.
   c) T definida en $\mathbb{N}$ por $x\ T\ y \iff 3x + y = 25$.

8. En $A = \{a, b, c, d\}$ se consideran las siguientes relaciones:
   a) $R = \{(a, b), (b, c), (c, d), (d, a)\}$ c) $S = \{(d, c), (c, b), (a, b), (d, d)\}$
   b) $T = \{(a, a), (b, a), (c, a), (d, d)\}$ d) $R = \{(b, a), (a, c), (d, d)\}$
   Averigua cuáles son aplicaciones y cuáles no lo son.

9. Demuestra que la función $f\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$ definida por $f(n) = \begin{cases} \frac{n}{s}, & si\ \ n\ \ es\ \ par \\ -\frac{n-1}{s}, & si\ \ n\ \ es\ \ impar \end{cases}$

es una aplicación.

10. Dado el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y la relación dada por $R = \{(1,1), (1,3), (1,5), (2,2), (2,4), (3,1), (3,3), (3,5), (4,2), (4,4), (5,1), (5,3), (5,5)\}$, obtén sus propiedades. ¿Es una relación de equivalencia? En caso afirmativo, determina el conjunto cociente.

11. Sea el conjunto $A = \{a, b, c, d, e, f\}$, y la partición dada por $P = \big\{\{a, d, e\}, \{c, f\}, \{b\}\big\}$, define una relación de equivalencia, cuyo conjunto cociente coincida con P.

12. En el conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ se define la relación $(a, b)R\,(c, d) \iff a \cdot d = b \cdot c$. Averigua si es una relación de equivalencia, y en caso afirmativo, obtén la clase del elemento $[(4, 8)]$.

13. En el conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ se define la relación $(a, b)R\,(c, d) \iff a + d = b + c$. Averigua si es una relación de equivalencia, y en caso afirmativo, obtén la clase del elemento $[(2,5)]$.

14. En $\Re^2$ se define la relación $(x, y)\,R\,(z, t) \iff x \cdot y = z \cdot t$. Comprueba que es una relación de equivalencia, y obtén el conjunto cociente.

15. En $\mathbb{Z}$ se define la relación $x\ R\ y \iff x^2 - y^2 = x - y$. Comprueba que es una relación de equivalencia, y obtén el conjunto cociente.

16. En $\Re^2$ se define la relación $(x, y)\,R\,(z, t) \iff x + t = y + z$. Comprueba que es una relación de equivalencia, y obtén el conjunto cociente.

Hoja 3. Relaciones de Orden. Retículos (2016)

1. En el conjunto $(\Re - \{0\}) \times \Re$ se define la relación

$$(x, y)R\,(z, t) \iff x \leq z \;\;,\;\; \frac{y}{x} = \frac{t}{z}$$

   a) Demuestra que es una relación de orden y estudia si es un orden total.
   b) Representa el conjunto de los puntos comparables con el elemento $(1,1)$.

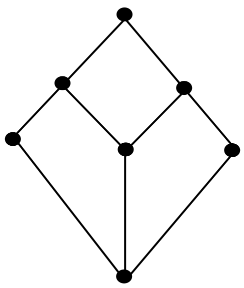
2. Determina el orden lexicográfico de las siguientes cadenas de bits: 001, 111, 010, 011, 000,100 basado en el orden $0 \leq 1$. Dibuja el diagrama de Hasse de estas cadenas, con el orden producto.

3. Sean (A, R) y (B, S) dos conjuntos ordenados, con $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{a, b\}$
   $R = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,4), (3,3), (3,4), (4,4)\}$
   $S = \{\,(a, a), (a, b), (b, b)\,\}$
   Halla $(A \times B, Prod)$ y $(A \times B, Lex)$

4. Sean (A, R) y (B, S) dos conjuntos ordenados, con $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{a, b\}$
   $R = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,2), (2,3), (3,3)\}$
   $S = \{\,(a, a), (a, b), (b, b)\,\}$
   Halla $(A \times B, Prod)$ y $(A \times B, Lex)$

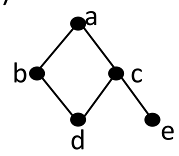
5. Sea $S = \{1, 2, 3, 4\}$. Respecto al orden lexicográfico basado en el orden usual " $\leq$ ",
   a) Encuentra todos los pares en $S \times S$ anteriores a $(2,3)$.
   b) Encuentra todos los pares en $S \times S$ posteriores a $(3,1)$.
   c) Dibuja el diagrama de Hasse de $(S \times S\ ,\ \leq_{Lex})$.

6. ¿Es un retículo distributivo el definido por el siguiente diagrama de Hasse?

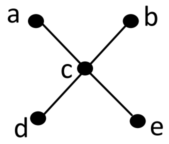


7. Halla los elementos maximales, minimales, máximo y mínimo (si los hay) para los siguientes conjuntos con el orden dado por el diagrama de Hasse:

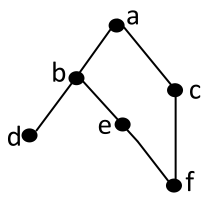
a)



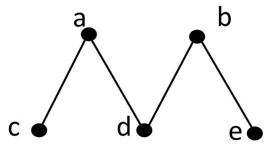
b)



c)

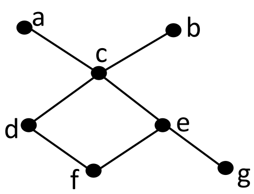


d)



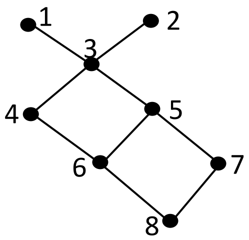
8. Halla cotas superiores, cotas inferiores, supremo e ínfimo (si los hay) del conjunto B en cada uno de los siguientes casos:

a)



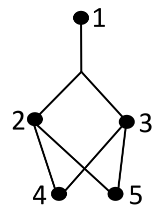
$B = \{c, d, e\}$

b)



$B = \{4, 5, 6\}$

c)



$B = \{2, 3, 4\}$

9. Representa el diagrama de Hasse de los siguientes conjuntos ordenados, y halla los elementos notables de los subconjuntos señalados:
   a) $(D_{60}\,,\ /\,)$, $\quad A = \{2, 5, 6, 10, 12, 30\}$ y $\quad B = \{2, 3, 6, 10, 15, 30\}$
   b) $(D_{48}\,,\ /\,)$, $\quad A = \{2, 4, 6, 12\}$ y $\quad B = \{3, 6, 8, 16\}$
   c) $(D_{40}\,,\ /\,)$, $\quad A = \{4, 5, 10\}$ y $\quad B = \{2, 4, 8, 20\}$

10. Representa el diagrama de Hasse del conjunto ordenado $(D_{168}\,,\ /\,)$. Si $A = \{4, 6, 12\}$, halla los elementos maximales de A, y las cotas superiores e inferiores, el supremo, el ínfimo, el máximo y el mínimo de A en D_{168} .

11. Sea D_{72} el conjunto de todos los divisores de 72, y $/$ la relación de divisibilidad a/b si y sólo si 'a divide a b' .
    a) Dibuja el diagrama de Hasse del conjunto ordenado $(D_{72}\,,\ /)$.
    b) Sea $B = \{9, 12, 36\}$. Encuentra cotas superiores, inferiores, supremo, ínfimo, maximales, minimales, máximo y mínimo, si existen, en B.
    c) Encuentra, si existe, el complementario de 9 y el de 18 en $(D_{72}\,,\ /)$.
    d) Razona si $(D_{72}\,,\ /)$ es un álgebra de Boole.

12. Halla, si los hay, los elementos maximales, minimales, máximo y mínimo para los siguientes conjuntos ordenados: $(\mathcal{P}(X),\ \subseteq)$; $\big((0,1),\ \geq\big)$; $(\mathbb{N}\ ,\ /\ )$; $(\mathbb{N}-\{1\}\ ,\ /\ )$.

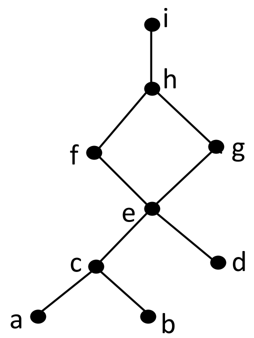
13. En cada uno de los casos siguientes señala si el conjunto X tiene o no una cota inferior, y si tiene alguna halla su ínfimo si existe.
    a) $X = \{x \in \mathbb{Z}\ ;\ \ x^2 \leq 16\}$
    b) $X = \{x \in \mathbb{Z}\ ;\ \ x = 2y\ \ \ para\ algún\ \ y \in \mathbb{Z}\}$
    c) $X = \{x \in \mathbb{Z}\ ;\ \ x^2 \leq 100x\}$

14. En $(\mathbb{N}\ ,\ /\ ) \times (\mathbb{N}\ ,\ /\ )$ se considera el orden lexicográfico. Determina, si existen, las cotas superiores, cotas inferiores, supremo e ínfimo del conjunto $A = \{(2,1),(3,4)\}$.

15. En $\mathcal{R}^2$ se considera la relación de orden $(x,y) < (x',y') \Leftrightarrow x \leq x'\ e\ \ y \leq y'$. Halla los elementos maximales y minimales, supremo e ínfimo de $C = \{(x,y)\ ;\ \ x^2 + y^2 = 1\}$.

16. Se considera en $D_{48} \times \mathbb{N}$ el orden lexicográfico correspondiente a tomar el orden divisibilidad en el primer factor y el orden usual en el segundo factor. Sea $S = \{(2,2),(2,3),(3,2),(6,3),(6,1),(4,2)\}$. Halla , si existen, las cotas superiores e inferiores, elementos maximales y minimales, máximo, mínimo, supremo e ínfimo de S.

17. Dado el orden parcial del siguiente diagrama de Hasse, obtén un orden total que lo contenga. ¿Cuántos pueden obtenerse?

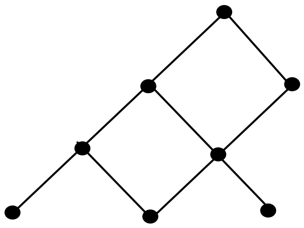


18. Sea $T = \{a,b,c,d,e,f,g\}$ la lista de tareas para realizar un trabajo, de las que se sabe que unas preceden a otras de la siguiente forma:
    $f \leq a,\quad f \leq d,\quad e \leq b,\quad c \leq f,\quad e \leq c,\quad b \leq f,\quad e \leq g\ ,\quad g \leq f$
    Halla el orden parcial. ¿Qué tareas pueden realizarse independientemente? Construye un orden si el trabajo lo realizad sólo una persona.

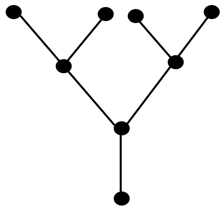
19. En $(D_{10}\ ,\ /\ ) \times (D_{18}\ ,\ /\ )$ se considera el orden lexicográfico. Halla las cotas superiores, cotas inferiores, supremo e ínfimo, si existen, del subconjunto $S = \{(2,2),(2,3)\}$. Dibuja el diagrama de Hasse.
    Se define la aplicación $f: D_{10} \times D_{18} \longrightarrow D_{180}$ por $f(a,b) = ab$. ¿Es f inyectiva? ¿Es f suprayectiva?

20. Estudia cuáles de los siguientes conjuntos ordenados son retículos.

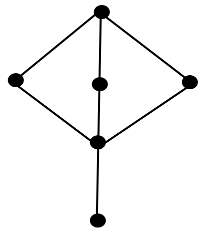
a)



b)



c)

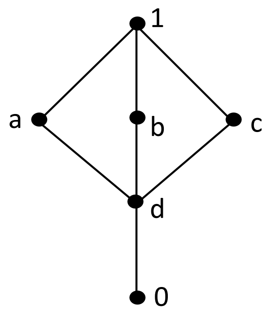


21. Obtén los diagramas de Hasse de todos los retículos, salvo isomorfismos, de uno, dos, tres, cuatro y cinco elementos.

22. Sea $\mathcal{F}(\mathbb{N})$ la colección de todos los subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$. ¿Tiene $(\mathcal{F}(\mathbb{N}), \subseteq)$ algún elemento maximal? ¿Tiene algún elemento minimal? ¿Es $(\mathcal{F}(\mathbb{N}), \subseteq)$ un retículo?

23. Sea $E(\mathbb{N})$ la colección de todos los subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$ que tienen un número par de elementos. En $(E(\mathbb{N}), \subseteq)$ se consideran los elementos $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 3\}$. Encontrar cuatro cotas superiores para $\{A, B\}$. ¿Tiene $\{A, B\}$ supremo en $(E(\mathbb{N}), \subseteq)$? ¿Es $(E(\mathbb{N}), \subseteq)$ un retículo?

24. Estudia si en el siguiente retículo se verifica la igualdad $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$.



25. Encuentra el complementario de cada elemento en $(D_{42}, /)$, $(D_{45}, /)$ y $(D_{105}, /)$. ¿Son álgebras de Boole estos retículos?

26. Se considera el conjunto $A = \{2, 3, 4, 6, 12, 15, 24, 90, 180, 360\}$ y la relación de orden de divisibilidad.
   a) Representa el diagrama de Hasse del conjunto ordenado $(A, /)$.
   b) ¿Es $(A, /)$ un retículo?
   c) Obtén, si existen, las cotas inferiores, cotas superiores, ínfimo, supremo, mínimo, máximo, elementos minimales y maximales del subconjunto $B = \{2, 3, 4, 6, 12, 180\}$.

Hoja 4. Álgebras de Boole. Expresiones booleanas.

1. Demuestra que en un álgebra de Boole se verifican las siguientes propiedades:
   a) $a \leq b \quad \Leftrightarrow \quad b' \leq a'$
   b) Si $a \leq b$, entonces $a \vee (b \wedge c) = b \wedge (a \vee c)$
   c) Si $a \leq b \leq c$, entonces $(a \wedge b) \vee (a \wedge b \wedge c) \vee (b \wedge c) \vee (a \wedge c\ ) = b$
   d) $a \leq b \quad \Leftrightarrow \quad a \wedge b' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a' \vee b = 1$

2. Construye un isomorfismo entre $(\wp\{1,2,3,4\}\,,\ \subseteq)$ y $(B^n\,, \leq^n)$, para algún n.

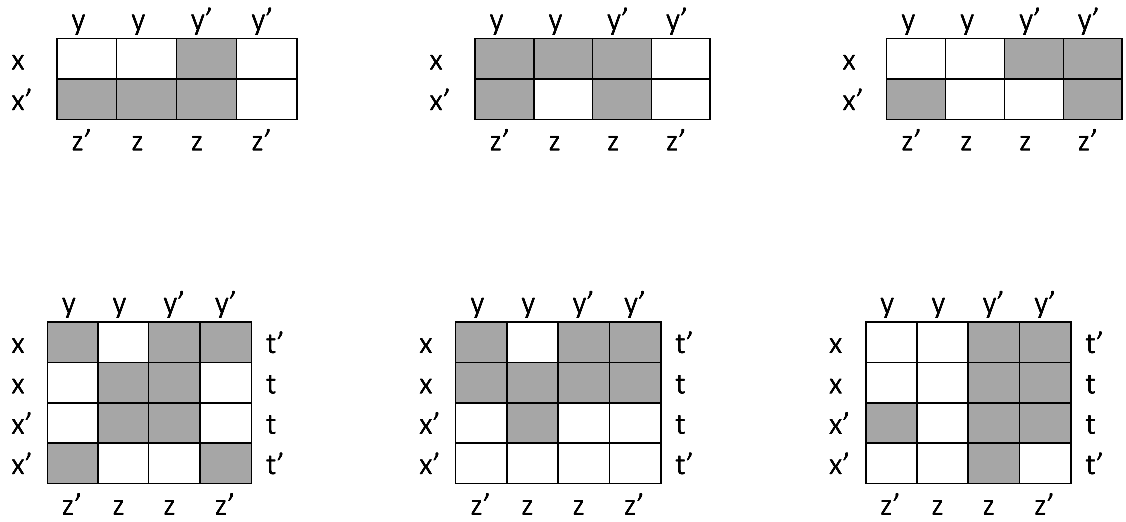
3. Sea $(A, \leq)$ un álgebra de Boole ¿Cuántos elementos minimales tiene $A - \{0\}$, si A es un álgebra de Boole de 8 elementos? ¿Y si A tiene 16 elementos?

4. Halla la tabla de verdad de la función $f: B^2 \longrightarrow B$ definida por la expresión $E(x, y) = (x \wedge y') \vee \big(y \wedge (x' \vee y)\big)$.

5. Determina $S(f)$ para las funciones $f: B^3 \longrightarrow B$ definidas por:
   a) $f(x, y, z) = x \wedge y$ b) $f(x, y, z) = z'$ c) $f(x, y, z) = (x \wedge y) \vee z'$

6. Determina todas las funciones booleanas binarias que cumplen:
$$f(a', b) = f(a, b') = (f(a, b))'$$

7. Escribe las expresiones booleanas que definen los siguientes mapas de Karnaugh:



8. Se considera el conjunto

a)

$S(f) =$
$\{(1,1,0,0),\ (1,1,1,1), (1,0,1,1), (1,0,0,0), (0,0,0,1), (0,1,0,0), (0,0,0,0), (0,1,0,1)\}$

b) $S(f) =$
$\{(0,0,0,1), (0,0,1,0), (0,1,0,0), (0,1,0,1), (0,1,1,1), (0,1,1,0), (1,1,0,0), (1,1,1,1), (1,0,1,0)\}$

Simplifica la expresión booleana de la función f que toma valor 1 en el conjunto $S(f)$ y 0 en el resto, mediante el mapa de Karnaugh.

9. Completa los huecos de la tabla teniendo en cuenta que la expresión que se desea obtener ha de ser lo más sencilla posible. Determina esa expresión y dibuja el mapa de Karnaugh correspondiente.

x	y	z	*f(x,y,z)*
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	
1	0	1	
1	1	0	1
1	1	1	

10. Dada la función booleana $f: B^4 \longrightarrow B$
$f(x,y,z,t) = xyzt + xy'zt + xyzt' + xy'zt' + x'y'z't' + x'yz't' + x'y'z't + x'yz't,$
demuestra que $f(x,y,z,t) = xz + x'z'$
    a) Utilizando las propiedades de un Álgebra de Boole.
    b) Utilizando los mapas de Karnaugh.

11. Simplifica al máximo las siguientes expresiones booleanas:
    a) $(x' + y)' + y'z$ b) $(x'y)'(x' + xyz')$ c) $x(xy' + x'y + y'z)$
    d) $(x + y)'(xy')'$ e) $y(x + yz)'$ f) $(x + y'z)(y + z')$

12. Utilizando el algoritmo de Quine-McCluskey, halla la expresión booleana mínima de la función $f: B^5 \longrightarrow B$ tal que
$S(f) = \{\{(1,1,1,1,1), (1,1,1,0,1), (1,1,0,1,1), (1,0,1,1,1), (1,0,1,0,1), (1,0,0,1,1), (1,1,0,0,1), (1,0,0,0,1)\}$

13. Simplifica las expresiones booleanas siguientes por el algoritmode Quine-McCluskey:

a) $E(x, y, z, t) = xyzt + xyz't + xy'zt + xy'z't + x'yzt + x'y'zt + xyzt' + x'yzt' + x'yz't'$
b) $E(x, y, z, t) = xyzt + xy'zt + xyz't + xyzt' + x'y'zt + x'yz't + x'yzt + x'yzt'$
c) $E(x, y, z, t) = xyzt + xy'zt + xyzt' + xy'zt' + x'y'z't' + x'yz't' + x'y't + x'yz't + x'y'zt$
d) $E(x, y, z, t) = xyzt' + xy'zt + xy'zt' + x'yzt + x'yz't + x'y'zt + x'y'z't$

14. Halla una expresión booleana mínima, en forma de suma de productos, para la función booleana cuyo conjunto de verdad es:
   a) $S(f) = \{(01011), (01111), (01001), (01101), (00111), (11010), (11110), (01010), (01110), (00110)\}$
   b) $S(f) = \{(10001), (01101), (10010), (11101), (01111), (10111), (10011), (11111), (10000), (01010)\}$
   c) $S(f) = \{(0001), (0011), (0110), (0111), (1001), (1010), (1011), (1101), (1111)\}$
   d) $S(f) = \{(01111), (01011), (11111), (11011), (10011), (10001), (10010), (10000)\}$
   e) $(f) = \{(0000), (0001), (0010), (0110), (1000), (1001), (1010), (1011), (1110), (1111)\}$

15. Encuentra la expresión más sencilla que detecte dentro del conjunto $\{0, 1, 2, \dots, 15\}$ los números de los siguientes conjuntos:

$A = \{múltiplos\ de\ dos\}$ $\quad$ $B = \{múltiplos\ de\ tres\}$
$C = \{múltiplos\ de\ cuatro\}$ $\quad$ $D = \{números\ primos\}$

16. Define una expresión booleana que compare, según el orden $\leq$, cada dos números del conjunto $\{0, 1, 2, 3\}$.

17. Se considera un ascensor dotado de un dispositivo de seguridad para que no puedan viajar niños pequeños solos, ni pesos excesivos. Queremos que el ascensor se ponga en marcha cuando esté vacío o con pesos entre 25 y 300 kilos. Dotamos al ascensor de tres sensores: A sensible a cualquier peso, B sensible a pesos mayores de 25 kilos y C sensible a pesos superiores a 300 kilos. Diseña el circuito más sencillo posible que cumpla dichas condiciones.

18. Halla una expresión booleana mínima, en forma de suma de productos, para la función booleana que toma
   - valor 1 en el conjunto numérico $C = \{1, 3, 5, 6, 7, 12, 13, 14, 15\}$ y
   - valor 0 en el conjunto numérico $C' = \{0, 2, 4, 8, 9, 10, 11\}$

19. Un examen de tipo test consta de 5 preguntas. Las respuestas correctas son:

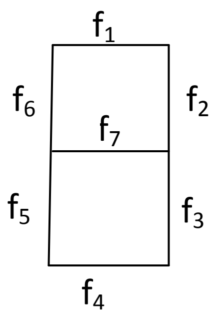
    1ª : SI   2ª: NO   3ª: SI   4ª: SI   5ª: NO

    Construye una expresión booleana que analice cada examen y distinga los aprobados de los suspensos. Se considera aprobado si al menos tres respuestas son correctas.

20. El consejo de administración de una empresa está compuesto por cinco miembros, $\{m_1 , m_2, m_3 , m_4 , m_5 \}$. Se somete a votación la aprobación de un proyecto. La votación es secreta y nadie puede abstenerse. Suponiendo que nadie vota en blanco, obtener una expresión booleana E, en forma de suma de productos de las variables binarias x_i (tales que x_i toma el valor 1 cuando m_i vota SI, y 0 en caso contrario), que tome el valor 1 cuando se aprueba el proyecto con al menos tres votos favorables de los miembros. Simplifica la expresión E.

21. Una barrera de paso a nivel depende de un semáforo que muestra uno de los tres colores (verde, rojo, naranja) y una señal luminosa de color blanco. La barrera se cierra para no dejarnos pasar si el semáforo está en rojo o simultáneamente el semáforo está en naranja y la señal blanca activada. Encuentra, mediante un mapa de Karnaugh la expresión booleana más simple, en forma de suma de productos, que representa la apertura de dicha barrera.

22. La aparición de una cifra decimal en el visor de una calculadora se produce mediante un circuito con cuatro entradas, que se corresponden con el código binario del dígito y siete salidas $\{f_i \,/\, i = 1, \dots ,7\}$, que se presentan como pequeños segmentos, iluminados o no en el visor, según el siguiente esquema:



    a) Traza la tabla de verdad de cada una de las funciones booleanas f_i: $B^4 \rightarrow B$ que represente este fenómeno binario.
    b) Encuentra expresiones mínimas en forma de suma de productos para f_1 y f_2.

23. Para evitar errores de transmisión en ciertos mensajes codificados, es frecuente añadir un bit, llamado de control, a un bloque de bits. Así, por ejemplo, en la representación de cifras decimales mediante un código binario,

0 se representa como $a_4a_3a_2a_1c = 00001$
1 se representa como $a_4a_3a_2a_1c = 00010$
2 se representa como $a_4a_3a_2a_1c = 00100$
3 se representa como $a_4a_3a_2a_1c = 00111$

El bit de paridad c vale 1 si el número de unos del bloque es par y vale 0 en caso contrario. Define una expresión para c que verifique lo anterior para los dígitos del 0 al 9, de manera que sea lo más simplificada posible en la forma suma de productos.

24. Cuatro personas X, Y, Z, T, cuyos votos valen respectivamente, 1, 4, 6 y 9 puntos, votan sobre distintos proyectos. Ninguna de las cuatro personas se abstiene, ni vota en blanco o nulo.

Se denotan por *x, y, z, t,* las variables que toman el valor 1 cuando las personas X, Y, Z y T, respectivamente, votan a favor del proyecto y toman el valor 0 cuando votan en contra del mismo.

a) Obtener una expresión booleana para la función $f(x, y, z, t)$ que toma el valor 1 cuando el proyecto es aceptado con mayoría absoluta de puntos (al menos 11 puntos) y 0 en caso contrario.
b) Simplificar la expresión anterior en forma de "suma de productos".

25. Un circuito eléctrico que consta de tres interruptores A, B y C y de una lámpara L(A,B,C) cumple las siguientes condiciones:

1. L se enciende si A y C están cerrados o si B y C están cerrados.
2. L se apaga si están A y C abiertos y B cerrado, si están A cerrado y B y C abiertos o si están A y B cerrados y C abierto.

Obtener una expresión booleana para la lámpara L(A,B,C), en forma de suma de productos mínima, que verifique las condiciones anteriores.

26. Una asamblea de 36 personas es convocada a votar para aceptar o rechazar distintas propuestas. La asamblea está dividida en cuatro grupos X, Y, Z, T, que cuentan con 5, 8, 10 y 13 miembros, respectivamente. A cada propuesta, todos los miembros de un grupo votan en el mismo sentido y nunca un grupo se abstiene. Las propuestas se acedptan si y sólo si alcanzan la mayoría absoluta.

a) Determine la tabla de verdad de la función $f(x, y, z, t)$ que toma valor 1 si se aprueba una propuesta y 0 si se rechaza.
b) Determine una expresión booleana para $f(x, y, z, t)$ en forma de suma de productos mínima.

27. Definir una expresión booleana mínima, en forma de suma de productos, para la función f que a cada número de 0 a 15 le hace corresponder el valor cero si el número es menor que 5 y el valor uno si el número es mayor o igual que 5.
28. Halla una expresión booleana mínima, en forma de suma de productos, para la función booleana que toma el valor 1 en el subconjunto de los números que no son primos del conjunto $C = \{0, 1, 2, \dots, 15\}$.

29. Define una expresión booleana que distinga los números $\{0, 1, 3, 4, 7, 8, 9, 10, 11, 15\}$ dentro del conjunto $C = \{0, 1, 2, \dots, 15\}$.

30. Encuentra la expresión más sencilla que detecte dentro del conjunto $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ los números del conjunto $\{0, 3, 4, 5, 7, 8, 9\}$.

31. Sea la función booleana $f: B^4 \rightarrow B$ tal que $f(x, y, z, t) = 1$ si (x, y, z, t) difiere de $(0, 1, 0, 0)$ dos dígitos como máximo y $f(x, y, z, t) = 0$ en otro caso. Encuentra una expresión mínima, en forma de suma de productos para f .

32. El consejo de administración de una empresa se reúne para votar unas propuestas. El peso del voto de cada uno de los miembros es proporcional al porcentaje de acciones que representa. Utilizando el algoritmo de Quine-McCluskey, define una expresión booleana mínima que apruebe la propuesta cuando en la votación se produce mayoría absoluta. (La representación de los miembros del consejo es: A 35%, B 28%, C 21% y D 16%).

33. Construye una función booleana que calcule el tercer dígito del resultado, en binario y leyendo de derecha a izquierda, de multiplicar por 5 un número de 0 a 9. Encuentra una expresión mínima, en forma de suma de productos, para esta función.

34. Una empresa química consta de una planta de producción donde se elaboran los productos diferentes $\{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7, P_8\}$. La dirección de la empres desea abrir una nueva planta de producción de pequeño tamaño en la que se fabriquen sólo algunos de los productos. Considerando que los productos P_1, P_3 deben elaborarse conjuntamente, los productos P_5, P_6, P_8 deben elaborarse conjuntamente, los productos P_2, P_7 deben elaborarse conjuntamente y que los beneficios previstos por la elaboración de cada uno de los productos, son los que se presentan en la siguiente tabla:

Producto	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8
Beneficio	6	4	2	2	4	2	3	3

Diseñar una estrategia para obtener un beneficio de, al menos, 15 unidades, construyendo una función booleana que represente el problema, definida por su expresión.